| APELLIDOS: | NOMBRE: |
|---|---|

**PARCIAL I (24/3/2014) Puntuación 40 %**

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) (**0.5 puntos**) $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{n!}{\sqrt[n]{n}}$ no existe porque las subsucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n-1}\}$ tienen límites distintos:
   Como $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$ y $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, resulta que $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = +\infty$ y $\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = -\infty$.

   b) (**1 punto**) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{2n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{2n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Denotando $b_n = \frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}$, se consideran las sucesiones
   $a_n = n\cdot\frac{n}{\sqrt{2n^4+n}} = \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   $c_n = n\cdot\frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} = \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n^4}}}$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   Aplicando la regla del sandwich, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   $a_n \le b_n \le c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

   c) (**1 punto**) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\ln(n+1)} \underset{1^\infty}{=} \lim_{n\to+\infty} e^{[\ln(n+1)]\cdot\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{[\ln(n+1)]\cdot\frac{-1}{n+1}} =$
   $= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln(n+1)}{n+1}} \underset{\ln(n+1) \ll n+1}{=} e^0 = 1.$

2. (**1.5 puntos**) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$, definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2+8),\ n \ge 1 \end{cases}$.

   En caso afirmativo, calcular su límite.
   i) $\{a_n\}$ estrictamente creciente:
   - Si $n=1$, $a_1 = 1 < \frac{9}{6} = a_2$
   - Si $a_n < a_{n+1}$, entonces $a_n^2 < a_{n+1}^2 \Rightarrow a_n^2 + 8 < a_{n+1}^2 + 8 \Rightarrow \frac{1}{6}(a_n^2+8) < \frac{1}{6}(a_{n+1}^2+8)$
     $\Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$

   Luego $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   ii) Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, entonces $L = \frac{1}{6}(L^2+8)$ cuyas soluciones son $L=2$, $L=4$.
   iii) $\{a_n\}$ acotada superiormente por 2:
   - Si $n=1$, $a_1 = 1 \le 2$
   - Si $a_n \le 2$, entonces $a_n^2 \le 4 \Rightarrow a_n^2 + 8 \le 12 \Rightarrow \frac{1}{6}(a_n^2+8) \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \le 2$

   Luego $a_n \le 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   De i) y iii) se deduce que $\{a_n\}$ converge.
   De ii) y iii) se tiene que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

3. (**1 punto**) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{n^n}$.
   Denotando $a_n = \frac{n!\,3^n}{n^n}$,
   $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,3^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot 3 = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ la serie no converge.
   $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{1^\infty}{=} \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1}$
   Como $a_n > 0\ \forall n$, la serie $\sum a_n$ diverge a $+\infty$.

4. (**1.5 puntos**) Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$ no converge

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0, +\infty \Rightarrow$$

C.C.L. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ tiene igual carácter que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, ($p$-serie con $p = 1/2 \leq 1$), que diverge a $+\infty$.

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ no converge absolutamente.

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2}} = 0$; $\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ estrictamente decreciente porque

$a_n > a_{n+1} \iff \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} > \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1} \iff \dfrac{n+1}{n^2} > \dfrac{n+2}{(n+1)^2} \iff (n+1)^3 > n^2(n+2) \iff$

$n^3+3n+3n^2+1 > n^3+2n^2 \iff n^2+3n+1 > 0$ Cierto $\forall n$.

Luego la serie converge aplicando el criterio de Leibniz.

5. (**2 puntos**) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{3^n(n^3-4n)}x^n$, se pide:

   a) Hallar su radio y su campo de convergencia.

   b) Obtener, si es posible, su suma en $x = 3$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4}{3^n(n^3-4n)}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{n^3-4n}} = \frac{1}{3} = L \Rightarrow r = 3$

Luego la serie de potencias converge absolut. en $(-3,3)$ y no converge en $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

Si $x = 3$, $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4}{n^3-4n}$, que es convergente por C.C.Límite con $\sum\frac{1}{n^3}$, que converge (por ser $p$-serie con $p = 3 > 1$):

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{n^3-4n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^3}{n^3-4n} = 4 \neq 0, +\infty.$

Si $x = -3$, $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^3-4n}$ conv. abs pues $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4}{n^3-4n}$ converge.

El campo de convergencia es $[-3,3]$

b) $\dfrac{4}{n^3-4n} = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{1/2}{n+2} + \dfrac{1/2}{n-2}$;

$\displaystyle S_n = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{-1}{k} + \frac{1/2}{k+2} + \frac{1/2}{k-2}\right) = -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n-2}\right)$

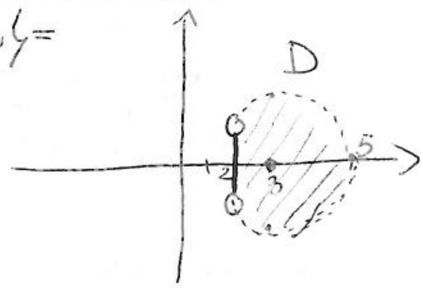
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{11}{24}$, que es la suma de la serie si $x=3$.

6. (**1.5 puntos**) Dada la función $f(x,y) = \sqrt{x-2}\,\ln(6x-x^2-y^2-5)$, se pide:

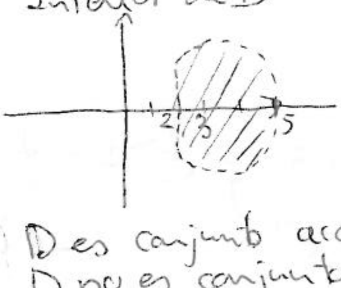
   a) Representar gráficamente el dominio $D$ de la función $f$.

   b) Representar gráficamente el interior de $D$ y la frontera de $D$. Razonar si $D$ es un conjunto compacto.

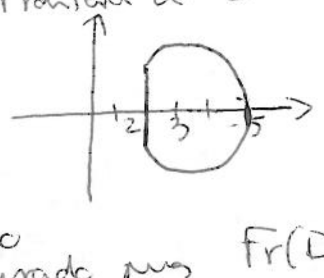
a) $\text{Dom}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2 \geq 0,\ 6x-x^2-y^2-5 > 0\} =$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ (x-3)^2+y^2 < 4\}.$




b) Interior de D




Frontera de D




D es conjunto acotado

D no es conjunto cerrado pues $Fr(D) \not\subset D$: $(5,0)\in Fr(D)$, pero $(5,0)\notin D$

Luego D no es conjunto compacto.